Capítulo 5.

- Se a variável aleatória X tem distribuição uniforme discreta em n pontos, o conjunto D_X pode ser uma infinidade numerável. Comente, justificando convenientemente.

- Defina prova de Bernoulli e dê um exemplo de uma. Defina uma variável aleatória para o seu exemplo e determine a respectiva função probabilidade.

- Defina uma variável aleatória cuja distribuição possa ser bem representada por uma distribuição de Bernoulli, fornecendo toda a informação necessária para que a variável possa ser identificada como tendo uma distribuição de Bernoulli. Qual a respectiva função de probabilidade.

- Dê um exemplo de uma prova de Bernoulli. Defina a variável aleatória associada e o conjunto D_X. Determine o valor esperado da variável definida.

- Se X tiver uma distribuição de Bernoulli com probabilidade de sucesso igual a θ. Prove que $Var(X) = \theta(1-\theta)$.

- Seja A o acontecimento definido como sucesso numa prova de Bernoulli e θ a probabilidade de ocorrência de A. Considere uma sucessão de $\boldsymbol{n}$ provas de Bernoulli independentes. Escreva a expressão que permite calcular a probabilidade de nas $\boldsymbol{n}$ provas se obterem $\boldsymbol{x}$ sucessos e $\boldsymbol{n}-\boldsymbol{x}$ insucessos.

- Considere uma sucessão de 25 provas de Bernoulli independentes e X a variável aleatória que representa o número de sucessos nas 25 provas. Se $E(X) = 2.5$, qual a probabilidade de sucesso em cada prova? Justifique.

- Considere uma sucessão de 10 provas de Bernoulli independentes E seja X a variável aleatória que representa o número de sucessos nas 10 provas. Se $Var(X) = 2.5$, qual a probabilidade de sucesso em cada prova? Justifique.

- Considere uma sucessão de 100 provas de Bernoulli independentes. Seja X a variável aleatória que representa o número de sucessos nas 100 provas. Se $E(X) = 10$, qual a variância da variável aleatória X? Justifique.

- Seja X a variável aleatória que representa o número de sucessos em $\boldsymbol{n}$ provas de Bernoulli independentes e θ a probabilidade de sucesso. Qual a distribuição do número de insucessos nessa sucessão de $\boldsymbol{n}$ provas. Defina os respectivos parâmetros.

- Considere duas sucessões de 25 provas de Bernoulli independentes e X e Y as variáveis aleatórias que representam o número de sucessos em cada uma das sucessões e tais que $E(X) = 2.5$ e $E(Y) = 10$. Então o número de sucessos nas 50 provas tem distribuição $B(50, 0.5)$. Diga, justificando se a afirmação é verdadeira ou falsa.

- Identifique as condições que permitem definir um processo de contagem como um processo de Poisson.

- Dê um exemplo de processo de contagem que possa ser definido como processo de Poisson. Defina a variável aleatória associada referindo toda a informação necessária à identificação da distribuição da variável.

- Sejam X_1 e X_2 o número de ocorrências de um processo de Poisson com ritmos médios, por hora, $\lambda_1 = \lambda_2 = \boldsymbol{\lambda}$, respectivamente nos intervalos $\Delta t_1 = (0; 2]$ e $\Delta t_2 = (2; 4]$, então $X_1 + X_2 \sim Po(\,2\lambda)$. Diga, justificando se a afirmação é verdadeira ou falsa.

- Sejam X_1 e X_2 o número de ocorrências de um processo de Poisson com ritmos médios, por hora, λ_1, λ_2, respectivamente nos intervalos $\Delta t_1 = (0; 3]$ e $\Delta t_2 = (2; 5]$, então $X_1 + X_2 \sim Po(\,\lambda_1 + \lambda_2,)$. Diga, justificando se a afirmação é verdadeira ou falsa.

- Sejam X_1 e X_2 o número de ocorrências de um processo de Poisson com ritmo médio $\boldsymbol{\lambda}$, por hora, respectivamente nos intervalos $\Delta t_1 = (0; 5]$ e $\Delta t_2 = (3; 7]$, então X_1 e X_2 são variáveis aleatórias independentes. Diga, justificando se a afirmação é verdadeira ou falsa.

- Sejam X_1 e X_2 o número de ocorrências de um processo de Poisson com ritmo médio $\boldsymbol{\lambda}$, por hora, respectivamente nos intervalos Δt_1 e Δt_2. Qual a condição que os intervalos têm de verificar para garantir a independência de X_1 e X_2? Justifique.

- Descreva situações típicas de aplicabilidade da distribuição de Poisson.

- Quando se deve utilizar a distribuição de Poisson?
  Será aconselhável utilizar a distribuição de Poisson para probabilidades Binomial quando a probabilidade de sucesso é superior a 0.1? Justifique a sua resposta.

- Será aconselhável utilizar a distribuição de Poisson para probabilidades Binomial quando a probabilidade de sucesso é superior a 0.9?

- Como varia a qualidade da aproximação da Binomial à Poisson com o número de provas de Bernoulli e a probabilidade de sucesso? Justifique

- Seja X uma variável aleatória com distribuição Binomial de parâmetros $n = 1000$ e $\theta = 0.35$. Seria adequado usar a distribuição de Poisson para calcular a probabilidade de a variável assumir valores superiores a 350? Justifique convenientemente.

- Seja X uma variável aleatória com distribuição Binomial de parâmetros $n = 5$ e $\theta = 0.001$. Seria adequado usar a distribuição de Poisson para calcular probabilidades para a variável aleatória X? Justifique.

- Seja X uma variável aleatória com distribuição Binomial de parâmetros $n = 500$ e $\theta = 0.001$. Seria adequado usar a distribuição de Poisson para calcular a probabilidade de a variável assumir valores superiores a 350?

- Seja X uma variável aleatória com distribuição Uniforme num intervalo $(-a, a) \subset \mathbb{R}$. Determine o valor esperado da variável aleatória X.

- Seja X uma variável aleatória com distribuição Uniforme num intervalo $(0,1) \subset \mathbb{R}$. Sabendo a função densidade, determine a respetiva função distribuição.

- Se $X \sim U(0,1)$ e $0 < a < b < 1$ mostre que $P(X < a | X < b) = a/b$. Justifique devidamente.

- Se $X \sim U(0,1)$ e $0 < a < b < 1$ mostre que

$P(X > b | X > a) = (1-b)/(1-a)$. Justifique devidamente.

- Se $X \sim U(a, a+1)$ com $a \in \mathbb{R}$, mostre que o 1º quartil da distribuição de X é $\xi_{0.75} = 3/4 + a$.

- Se $X \sim U(a, a+1)$ com $a \in \mathbb{R}$, mostre que o 1º quartil da distribuição de X é $\xi_{0.25} = 1/4 + a$.

- Se $X \sim U(a, a+1)$ com $a \in \mathbb{R}$, mostre que a mediana da distribuição de X é $\mu_e = 1/2 + a$.

- Se $X \sim U(0, 2a)$ com $a \in \mathbb{R}$, prove que que a mediana da distribuição de X é $\xi_{0.5} = a$.

- Se $X \sim U(-a, a)$ com $a \in \mathbb{R}$, prove que a mediana da distribuição de X é $\mu_e = 0$.

- Se $X \sim U(-a, a)$ com $a \in \mathbb{R}$, prove que o 1º quartil da distribuição de X é $\xi_{0.25} = -a/2$.

- Se $X \sim U(-a, a)$ com $a \in \mathbb{R}$, prove que o 3º quartil da distribuição de X é $\xi_{0.75} = a/2$.

- Se $X \sim U(0, a)$ com $a \in \mathbb{R}$, mostre que o 1º Quartil da distribuição de X é $\xi_{0.25} = a/4$.

- Se X tem distribuição uniforme no intervalo $(a, a+4)$ com $a \in \mathbb{R}$, mostre que a probabilidade de qualquer sub-intervalo (a, x) nele contido é igual a um quarto da respectiva amplitude. Justifique todos os passos.

- Se X tem distribuição uniforme no intervalo $(a, a+2)$ com $a \in \mathbb{R}$, mostre que a probabilidade de qualquer sub-intervalo (a, x) nele contido é igual a metade da respectiva amplitude. Justifique todos os passos.

- O que significa a transformação uniformizante?

- Seja X uma variável aleatória contínua com função distribuição estritamente crescente no intervalo (a, b). Encontre a distribuição da variável aleatória $Y = F_X(X)$. Qual a distribuição da variável aleatória Y.

- Em que consiste o processo de estandardização da distribuição normal? Explique o processo.

- Se $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, mostre que a $P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma)$ é independente dos valores de μ e σ.

- Se $X \sim N(1,1)$ mostre que para qualquer constante $\boldsymbol{c}$ se tem que $\boldsymbol{c}X \sim N(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{c^2})$.

- Seja $X \sim N(0, \sigma^2)$. Mostre que $P(X > \sigma) < 1/2$. Justifique devidamente.

- Seja $X \sim N(0, \sigma^2)$. Indique, justificando, a distribuição da variável aleatória

$Y = -X$ e o valor dos respectivos parâmetros.

- Se $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, $\quad i = 1, 2, \cdots, n$, são variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, mostre, justificando, qual a distribuição da variável $Y = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i X_i$ com α_i constantes.

- Se $X_i \sim N\left(\mu_i, \sigma_i^2\right) \quad i = 1, 2, \cdots, n$, são variáveis aleatórias independentes, mostre justificando qual a média e variância da variável $Y = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i X_i$ com α_i constantes.

- Se $X_i \sim N(0,1) \quad i = 1, 2, \cdots, n$, variáveis aleatórias independentes mostre justificando qual a média da variável $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i^2$.

- Se $X_i \sim N\left(\mu_i,\ \sigma_i^2\right) \quad i = 1, 2, \cdots, n$, são variáveis aleatórias independentes mostre justificando qual a média e variância da variável $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$.

- Se $X \sim N(0,1)$ qual a distribuição da variável aleatória $Y = a + bX$. Não esquecer de mencionar os respectivos parâmetros..

- Se $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, o valor $x\colon P(X \leq x) = 0.3$ é superior ou inferior à média da variável aleatória X? Justifique. [Pode usar um gráfico para apoiar a sua justificação]

- Se $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, o valor $x\colon P(X > x) = 0.3$ é superior ou inferior à média da variável aleatória X? Justifique. [Pode usar um gráfico para apoiar a sua justificação]

- Se $X \sim N(0, 1)$, o valor $x\colon P(X > x) = 0.3$ é positivo ou negativo ? Justifique. [Pode usar um gráfico para apoiar a sua justificação]

- Se $X \sim N(0, 1)$, o valor $x\colon P(X \leq x) = 0.3$ é positivo ou negativo ? Justifique. [Pode usar um gráfico para apoiar a sua justificação].

- Se $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, o valor $x\colon P(X > x) = 0.8$ é superior ou inferior à média da variável aleatória X? Justifique. [Pode usar um gráfico para apoiar a sua justificação]

- Se $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, o valor $x: P(X \leq x) = 0.8$ é superior ou inferior à média da variável aleatória X? Justifique.

- Se $X \sim N(0, 1)$, o valor $x: P(X \geq x) = 0.8$ é positivo ou negativo ?

- Se $X \sim N(0, 1)$, o valor $x: P(X \leq x) = 0.8$ é positivo ou negativo ?

- Se $Z \sim N(0, 1)$ e $P(Z \leq z) = k$, determine a $P(-z \leq Z \leq z)$.

- Se $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ e $P(\mu - x \leq X \leq \mu + x) = 0.8$ qual o valor da $P(X \geq \mu + x)$.

- Se $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ e $P(\mu - x \leq X \leq \mu + x) = 0.8$ qual o valor da $P(X \leq \mu - x)$.
- Se $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ e $P(\mu - x \leq X \leq \mu + x) = 0.5$ qual o valor do 1º Quartil da distribuição da variável aleatória X. Justifique.
- Se $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ e $P(\mu - x \leq X \leq \mu + x) = 0.5$ qual o valor do 3º Quartil da distribuição da variável aleatória X.
- Se $Z \sim N(0, 1)$ mostre que $P(Z \leq z) = 1 - P(Z \leq -z)$.
- Explique a relação entre o processo aleatório de Poisson e a distribuição Exponencial?

- Explique a relação entre o processo aleatório de Poisson e a distribuição $Gama(n, \lambda)$, $n \subset \mathbb{N}$.
- Explique a relação entre a distribuição Exponencial e a distribuição Gama.
- Dê dois exemplos de fenómenos que podem ser bem representados por uma distribuição Gama.

- Qual a distribuição da soma de $\boldsymbol{n}$ variáveis aleatórias com distribuição Gama, independentes mas não identicamente distribuídas.

- Qual a distribuição de uma soma de k variáveis aleatórias independentes com distribuição Exponencial? Justifique.

- Se um processo de Poisson tem taxa média igual a λ por unidade de tempo, mostre que o tempo médio de espera pela 8ª ocorrência é $8/\lambda$.

- Seja um processo de Poisson com intensidade igual a λ por unidade de tempo, indique, justificando, a distribuição do tempo de espera pela 5ª ocorrência e respectivos parâmetros.

- Seja um processo de Poisson com intensidade igual a λ por unidade de tempo, indique, justificando, a distribuição do tempo de espera entre a 4ª e a 5ª ocorrência e respectivo parâmetro.

- Se X é v.a. que representa o tempo de espera pela m-ésima ocorrência de um processo de Poisson com taxa média λ, por unidade de tempo, explique o processo de cálculo da $P(X > x)$.

- Seja X v.a. que representa o número de ocorrências num processo de Poisson com taxa média λ, por unidade de tempo, e Y o tempo de espera pela 3ª ocorrência. Indique, justificando, a distribuição da variável Y e a respectiva média.

- Seja X v.a. que representa o número de ocorrências num processo de Poisson com taxa média λ, por unidade de tempo, e Y o tempo de espera entre a 5ª ocorrência e a 10º ocorrências. indique, justificando, a distribuição da variável Y e a respetiva média.

- Se $X_1 \sim N(1,1)$ e $X_2 \sim N(2,1)$, e X_1, X_2 são variáveis aleatórias independentes. Indique, justificando, qual a distribuição de $(X_1 - 1) + (X_2 - 2)$.
- Se $X_1 \sim N(1,1)$, mostre, justificando devidamente, que $(X_1 - 1)^2 \sim \chi^2_{(1)}$.
- Se X_i $(i = 1; \cdots, n)$ são variáveis aleatórias independentes com distribuição normal estandardizada, indique, justificando convenientemente, a distribuição da variável aleatória $\sum_{i=1}^{n} X_i^2$.

- Se X_i $(i = 1; \cdots, n)$ são variáveis aleatórias i.i.d. com média e variância finitas, indique, justificando convenientemente, em que condições é possível obter a distribuição aproximada da variável aleatória $\sum_{i=1}^{n} X_i$.